Die Formelsammlungen sind teilweise stark veraltet (Vorlesungsinhalte aus vergangenen Semestern, alte Normen...) und sollten lediglich als Hilfestellung zum Verfassen eigener Formelsammlungen dienen. Kontrolliert auf jeden Fall die Formeln, es haben sich auch Fehler eingeschlichen.

HM3 Formelsammlung

Jan Höffgen

21. April 2013

Diese Zusammenfassung wurde auf Basis der Vorlesung
Höhere Mathematik III für Bauingenieure
im Wintersemester 2011/12 erstellt.

Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit.
Fehler bitte der Fachschaft melden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Gewöhnliche DGLn erster Ordnung

- $F(x, y, y') = 0$: implizite DGL
- $f(x, y) = y'$: explizite (nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöste) DGL
- Anfangswertproblem: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.1.1 Isoklinenmethode

- Isoklinen (Neigungslinien) sind Kurven, für die y' einen konstanten Wert c besitzt.
- implizit durch $y' = f(x, y) = c$ definiert
- Vorgehen: Mehrere Isoklinen einzeichnen, zwischen den Mitten zweier Isoklinen entsprechende Steigung $\Rightarrow$ Polygonzug

1.1.2 Separierbare DGLn

- $y' = f(x, y)$ ist separierbar, falls $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$
  1. singuläre/ konstante Lösung
     Ist η Nullstelle von h(y), so ist $y(x) = \eta$ (const.) eine Lösung der DGL
  2. Allgemeine Lösung: Trennung der Veränderlichen
     $y' = \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$
- Auflösen nach y ergibt Lösung mit Parameter c (Integrationskonstante)

1.2 Lineare DGLn erster Ordnung

- $y' + a(x)y = b(x)$
  - DGL homogen: b(x) $=$ 0
  - DGL inhomogen: b(x) $\neq$ 0
- Lösungsverfahren
  1. Lösen der homogenen Gleichung mit $y_h(x) = c \cdot e^{-\int a(x)dx},\ c \in \mathbb{R}$
  2. Bestimmung einer Lösung der inhomogenen Gleichung mit $y_p(x) = e^{-\int a(x)dx} \cdot \int b(x) \cdot e^{\int a(x)dx}dx$
  3. Alle Lösungen der inhomogenen DGL: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

2 DGLn n-ter Ordnung

- implizit: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$
- explizit: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n)})$

2.1 DGLn n-ter Ordnung als n DGLn 1. Ordnung schreiben

- $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$
- Transformatoin der AB: $Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$
- Lösen: $y_n'(t)$ lösen und anschließend integrieren bis $y_1(t)$

2.2 Lineare DGLn n-ter Ordnung

- $L_n[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$
- $b(x) = 0 \Leftrightarrow$ homogen, $b(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ inhomogen
- Lösungsmethoden
  - $L_n[y] = 0$ besitzt n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), ..., x_n(x)$.
    allgemeine Lösung: $y_h(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x),\ c_i \in \mathbb{R}$
  - Die auf (a,b) gegebenen Lösungen $y_1(x), ..., y_n(x)$ von $L_n[y]$ sind linear unabhängig
    $$\Leftrightarrow \det \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{=W(x) \text{ Wronski-Determinante}} \neq 0 \text{ für ein } x \in (a,b)$$
  - Reduktionsverfahren von d'Alembert:
    Gegeben: homogene DGL n-ter Ordnung, $y_1(x) \neq 0$ eine Lösung von $L_n[y] = 0$
    Dann: Ansatz $y(x) = z(x)y_1(x) \Rightarrow y' = z'y_1 + zy_1' \Rightarrow y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'',\ z(x) \not\equiv 0$
    liefert eine weitere, zu $y_1(x)$ linear unabhängige Lösung von $L_n[y] = 0$
  - Fall n=2: $y_1(x)$ bekannte Lösung $\Rightarrow y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx$ ist weitere Lösung
  - Fall n=2: Partikulärlösung: $y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)b(x)}{W(y_1,y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(y_1,y_2)} dx$
  - Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

2.3 Lin. DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- $L_n[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(x)$
- Lösung der hom. DGL
  - charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$
  - $\mu \in \mathbb{R}$ s-fache Nullstelle von p $\Rightarrow e^{\mu x}, xe^{\mu x}, ..., x^{s-1}e^{\mu x}$ sind s reelle, l.u. Lösungen von $L_n[y] = 0$
  - $\alpha + i\beta$ s-fache Nullstelle von p $\Rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), ..., x^{s-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$,
    $e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), ..., x^{s-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sind 2s reelle, l.u. Lösungen von $L_n[y] = 0$
- Partikulärlösung (Ansätze vom Typ der rechten Seite)
  - $b(x) = q(x)e^{\mu x}$ (q: Polynom m-ten Grades, μ: t-fache Nullstelle von p)
    $\Rightarrow y_p(x) = x^t(c_0 + c_1 x + ... + c_m x^m)e^{\mu x}$
  - $b(x) = q(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ oder $b(x) = q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ (q: Polynom m-ten Grades, $\alpha + i\beta$ t-fache Nulstelle von p) $\Rightarrow y_p(x) = x^t e^{\alpha x}(\cos(\beta x)(c_o + c_1 x + ... + c_m x^m) + \sin(\beta x)(d_0 + d_1 x + ... + d_m x^m))$
  - Lösen durch Koeffizientenvergleich

3 Elementar lösbare DGLn

3.1 DGLn vom Typ $y' = g(\frac{y}{x})$

- $y' = f(x,y) = g(\frac{y}{x}) \Rightarrow$ Substitution: $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xu(x) \Rightarrow y'(x) = xu'(x) + u(x) = g(u)$
  $\Rightarrow u'(x) = \frac{g(u)-u}{x} \Rightarrow$ Lösen mit TdV und Resubstitution

3.2 Die Bernoulli'sche DGL

- $y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0 \Rightarrow$ (Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha} \Rightarrow$) Substitution: $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$
  $\Rightarrow u' + (1-\alpha)a(x)u = (\alpha - 1)b(x) \Rightarrow$ DGL erster Ordnung

3.3 Die Riccati'sche DGL

- $y' + a(x)y + b(x)y^2 = h(x)$
- Lösung $y_1(x)$ bekannt $\Rightarrow$ durch Einsetzen von $y(x) := z(x) + y_1(x)$ in Bernoulli-DGL umschreiben $\Rightarrow z' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))z + b(x)z^2 = 0 \Rightarrow y(x)$ ausrechnen

3.4 Die Euler'sche DGL

- DGL der Art $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = b(x)$
- Substitution: $x = e^t,\ u(t) = y(e^t) \Rightarrow$ lin. DGl mit konst. Koeff.

4 Potenzreihenlösungen von gewöhnlichen DGLn

4.1 Reihendarstellung von Funktionen

- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

4.2 Lösen von DGLn mit unendlichen Reihen

- Potenzreihe mit Entwicklungsstelle x_0 : $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \rightarrow y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$, $\rightarrow y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}(x-x_0)^k$ (i.Allg. $x_0 = 0$)
- Einsetzen in DGL liefert Rekursionsformel
- Anfangsbedingungen liefern Werte für a_{k+n}
- Allgemeines a_k mit vollständiger Induktion bestimmen, in Reihe einsetzen

5 Periodische Funktionen

5.1 Periodizität

- f p-periodisch $\Leftrightarrow f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- f p-periodisch $\Rightarrow$ f np-periodisch
- primitive Periode: kleinstmögliches p
- für p-periodische Funktionen $f_1(x), f_2(x)$, bel. $g(x)$ mit $W_{f_1} \subset D_g$ gilt:
  - $u(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ ist p-periodisch
  - $v(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ ist p-periodisch
  - $w(x) = f_1(\alpha x), \alpha > 0$ ist $\frac{p}{\alpha}$-periodisch
  - $y(x) = f_1(x) \pm f_2(\alpha x)$ ist $\frac{p}{\alpha}$-periodisch
  - $z(x) = g(f_1(x))$ ist p-periodisch

5.2 Fourier-Reihen

- Für p-periodische Funktion f und Intervall I der Länge p gilt:
  $F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{p}x))$
  - $a_0 = \frac{1}{p}\int_I f(x)dx$
  - $a_k = \frac{2}{p}\int_I f(x)\cos(\frac{2k\pi}{p}x)dx$
  - $b_k = \frac{2}{p}\int_I f(x)\sin(\frac{2k\pi}{p}x)dx$
- f ungerade $\leftrightarrow a_k = 0$ für $k \geq 0$
- f gerade $\leftrightarrow b_k = 0$ für $k \geq 1$

5.3 Dirichlet-Bedingungen

1. f ist p-periodisch
2. f hat im Intervall $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen
3. f ist im Intervall $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ in endlich viele monotone Teilintervalle zerlegbar

- Falls Bed. erfüllt, konvergiert die Fourier-Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt
  $F(x_0) = \begin{cases} f(x_0) \text{ falls f in } x_0 \text{ stetig} \\ \frac{1}{2}(\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)) \text{ sonst} \end{cases}$

6 Numerische Behandlung gewöhnlicher DGLn

6.1 Picard-Iteration

- Geg: AWP der Form $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$
- Iteration: $y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt,\ k = 0, 1, ...$

6.2 Explizites Euler-Verfahren

- Geg: $f, x_0, y_0, b, n, h := \frac{b-x_0}{n}$
- Iteration: $y_{k+1} := y_k + hf(x_k, y_k),\ x_{k+1} := x_k + h,\ k = 0, 1, ...n-1$

6.3 Taylor-Verfahren p-ter Ordnung

- Wie explizites Euler-Verfahren, aber mit Taylor-Polynom als Approximation
- $y_{k+1} := T_p(x_k + h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}h^j y^{(j)}(x_k),\ x_{k+1} := x_k + h$
  - $y' = f(x, y(x))$
  - $y'' = f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)$
  - $y''' = f_{xx} + f_{xy}f + (f_{yx} + f_{yy}f)f + f_y(f_x + f_y f)$

6.4 Implizites Euler-Verfahren

- Geg: $f, x_0, y_0, b, n, h := \frac{b-x_0}{n}$
- Iteration: $x_{k+1} := x_k + h,\ y_{k+1} := y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$ nach y_{k+1} auflösen $(k = 0, 1, ...n-1)$

6.5 Modifiziertes Euler-Verfahren

- Geg: $f, x_0, y_0, b, n, h := \frac{b-x_0}{n}$
- Iteration: $y_{k+1} := y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)),\ x_{k+1} := x_k + h$

6.6 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

- Geg: $f, x_0, y_0, b, n, h := \frac{b-x_0}{n}$
- Iteration: $y_{k+1} := y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),\ x_{k+1} := x_k + h,\ k = 0, 1, ...n-1$
  - $K_1 = f(x_k, y_k)$
  - $K_{2/3} = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_{1/2})$
  - $K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3)$

7 Rand- und Eigenwertprobleme

- RWP: Nicht alle benötigten Randwerte bekannt, sondern z.B. zwei Funktionswerte $\Rightarrow$ Funktion nicht immer (eindeutig) bestimmbar
- EWP: hom. lin. DGL enthält Faktor λ $\Rightarrow$ ges.: Werte für λ, die nichttriviale Lsg. (= Eigenfunktion) ergeben

8 Partielle DGLn

8.1 1. Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

- Wärmeleitungsgleichung: $u_t(x,t) = a \cdot u_{xx}(x,t), 0 \le x \le l, t > 0$ Anfangsbed.: $u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l$, Randbed.: $u(0,t) = \psi_1(t), u(l,t) = \psi_2(t), t > 0$
  - Übergangsbed: $u(0,0) = \varphi(0) = \lim_{t \to 0+} \psi_1(t), u(l,0) = \varphi(l) = \lim_{t \to 0+} \psi_2(t)$
- Reihenansatz: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\frac{k\pi x}{l}) e^{-\frac{k^2\pi^2 at}{l^2}}$
- $c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\frac{k\pi x}{l})dx$ oder durch Abgleichen mit φ (:=reine Sinusfunktion) liefert u(x,t)

8.2 1-dim homogene Wellengleichung

- DGL: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
- allg. Lsg: $u(x,t) = \chi(x+ct) + \psi(x-ct)$
- d'Alembert'sche Lsg des AWP: $u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x+ct) + \varphi_1(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_2(s)ds$ mit $u(x,0) = \varphi_1(x),\ u_t(x,0) = \varphi_2(x)$
- Abhängigkeitsgebiet: $[x_0 - ct, x_0 + ct]$

8.3 Differenzenverfahren für die inhomogene Potentialgleichung (Poissongleichung)

- DGL: $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ für $(x,y) \in \text{int}D,\ u(x,y) = g(x,y)$ für $(x,y) \in \partial D$
- Gebiet D mit Gitter (Gitterkonstante $k = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$) und Gitterpunkten $(x_i, y_j) = (ih, jh), i, j = 1, ..., n$ überdecken
- Näherungswerte $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$: $\frac{u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f(x_i, y_j) \to (n-1)^2$ Gleichungen